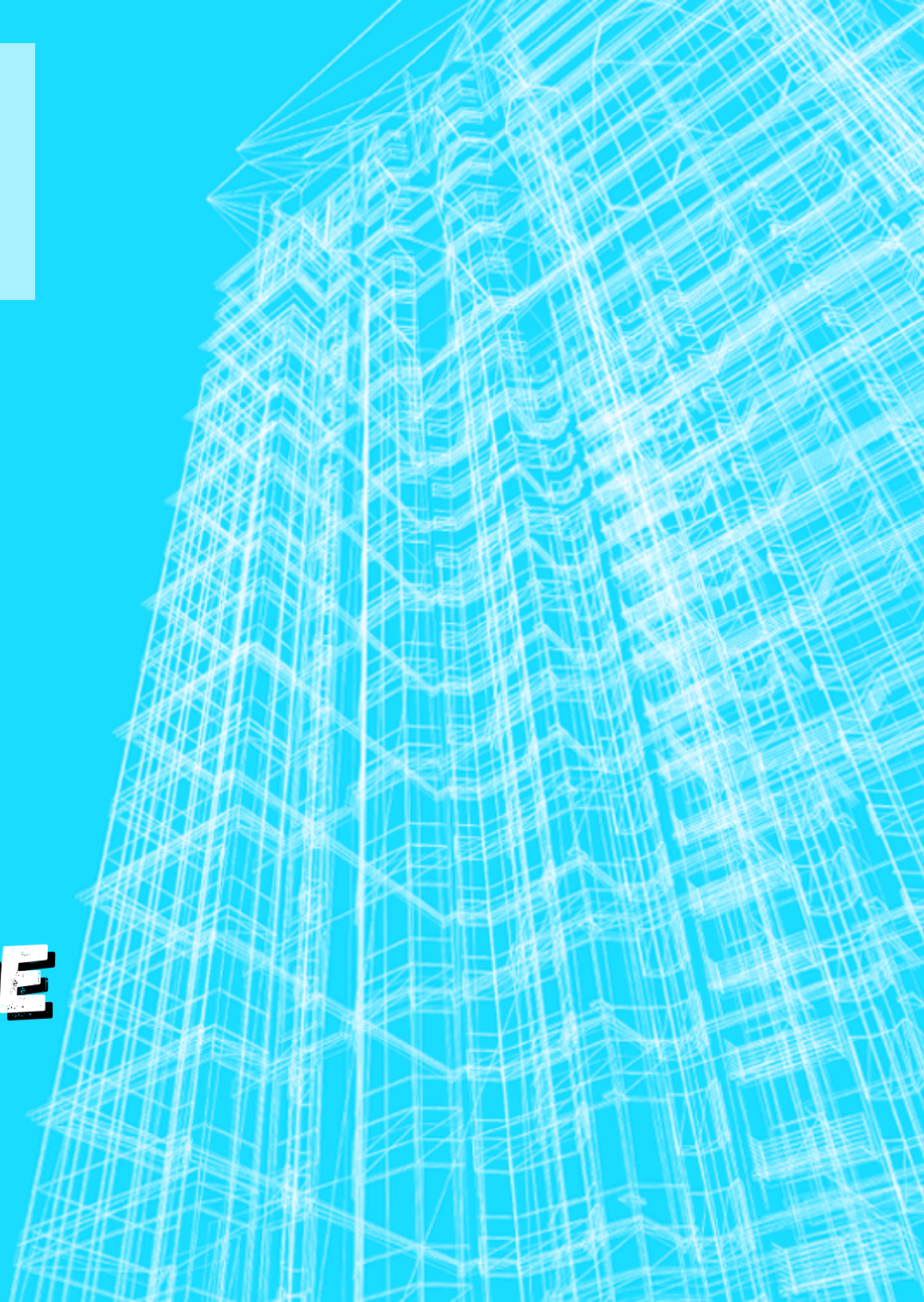


**CARTILHA DE DIVULGAÇÃO  
CIENTÍFICA**

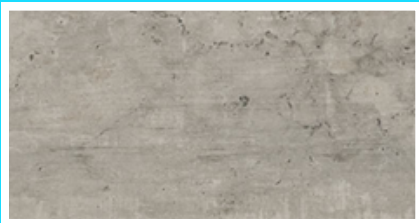
**MODELAGEM  
MATEMÁTICA DE  
MATERIAIS  
HETEROGÊNEOS  
PARA SOLUÇÕES DE  
ENGENHARIA.**



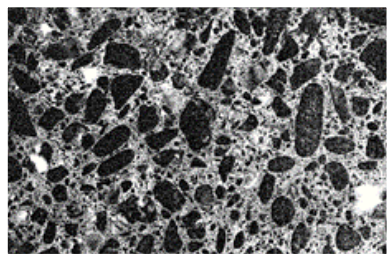


# MATERIAIS COMPÓSITOS

Na natureza, a maioria dos materiais, são considerados homogêneos em algum nível de escala. Como por exemplo o concreto, que aparentemente parece ser formado por um único componente.



Mas olhando mais de perto, podemos ver que trata-se de um material heterogêneo, ou seja, formado por mais de um componente.



O concreto, em uma menor escala, é considerado um material composto, o qual se define como o resultado da junção de dois ou mais materiais diferentes de forma a refinar suas propriedades globais para uma determinada aplicação [1].

A lista de aplicações dos materiais compostos na engenharia civil é muito vasta:

- Telhado de material composto, Suíça, 2008



Nesse caso, a utilização de polímeros reforçados por fibras de vidro possibilitou grande leveza na estrutura do telhado e ele foi suportado apenas por paredes de vidro.

- Dawlish Footbridge, UK, 2012



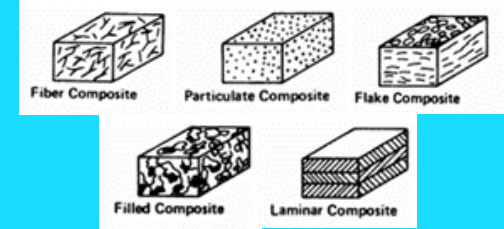
O aço da ponte, ao ser substituído por um polímero reforçado por fibras, evitou os efeitos da corrosão.

- Asturias Bridge, Espanha, 2004



Uma ponte de tráfego é construída com vigas compostas do tipo sanduíche.

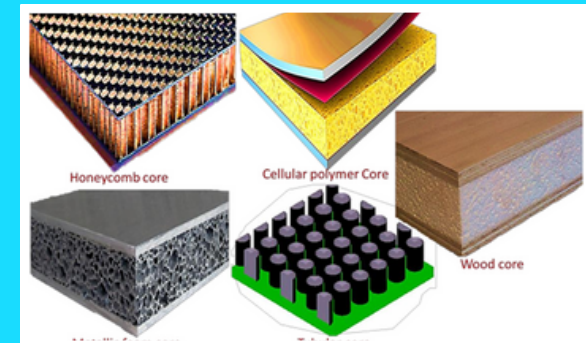
Para essas e diversas outras aplicações, os tipos de compostos mais utilizados são [1]:



- Matrizes reforçadas por fibras
- Matrizes reforçadas por partículas
- Matrizes reforçadas por flocos
- Estruturas esqueleto
- Compostos laminados



Vigas do tipo esqueleto.



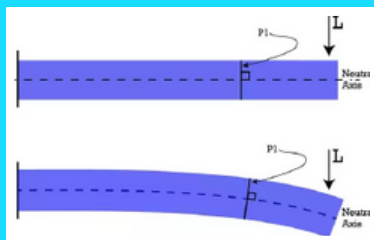
Exemplos de laminados tipo sanduíche.

# ANÁLISE ESTRUTURAL

Existem diversas teorias que possibilitam uma análise matemática do comportamento das vigas

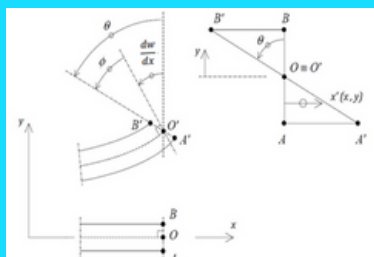
- Teoria de Euler-Bernoulli

Permite calcular a deflexão de uma viga sob carregamento. Considera-se que as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo neutro [2].



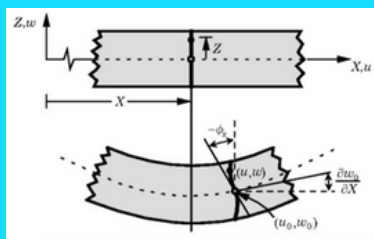
- Teoria de Timoshenko

Calcula a deflexão com a adição, de uma forma linear, dos efeitos da deformação por cisalhamento, corrigindo essa falha da teoria de Euler-Bernoulli [3].



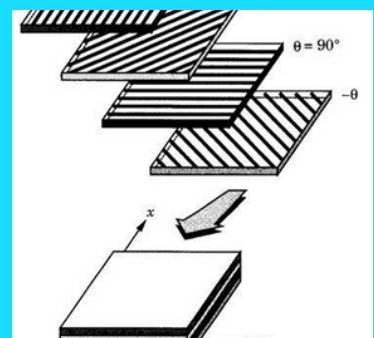
- Teorias de alta ordem

Consideram funções de ordem superior na descrição do cisalhamento. Nessas teorias, as seções transversais não mais permanecem planas após a deformação, capturando efeitos como os de empenamento da seção [4].



- Teorias de compósitos laminados

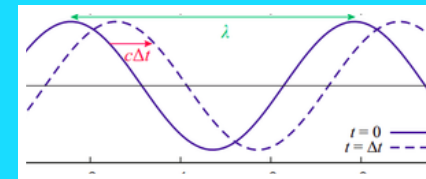
Além das teorias de vigas clássicas, no caso de laminados é necessário adicionar efeitos relacionados às tensões interlaminares, deslizamentos, lei constitutiva mais complexa e influência da disposição das fibras. As principais teorias de vigas multicamadas são a Camada Única Equivalente, Zig-Zag e LayerWise [5].



Para a resolução das equações diferenciais dos modelos de vigas, existem métodos numéricos e analíticos:

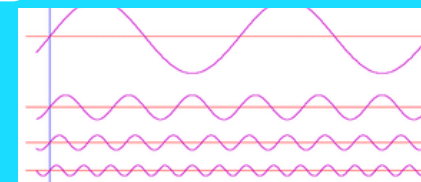
- Método das ondas viajantes

Permite que a solução seja escrita no formato de uma onda viajante. Isto é, uma onda que viaja pelo espaço com velocidade constante, mantendo a sua forma fixa a todo momento [6].



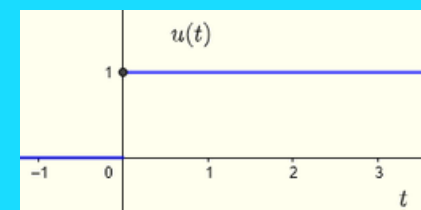
- Método da separação de variáveis

Permite que a solução seja escrita como uma soma infinita de ondas no formato de senos e cossenos [6].



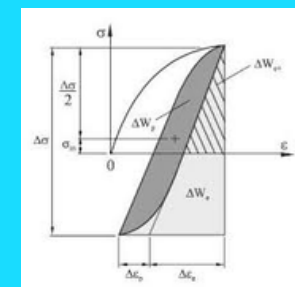
- Método das Funções de Green

Modelagem que descreve a mecânica da viga através de funções delta de Dirac e Heaviside para o caso de carregamento unitário livre e a partir da função núcleo obtida pode ser expandida para vários tipos de problemas



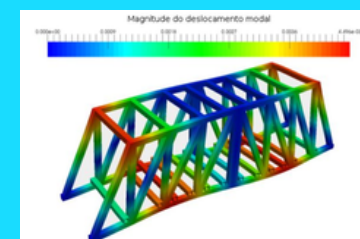
- Métodos da Energia

Utiliza o cálculo variacional e o primeiro teorema da energia: para um sistema conservativo, a situação de equilíbrio é alcançada quando a primeira variação da energia total é nula [7].



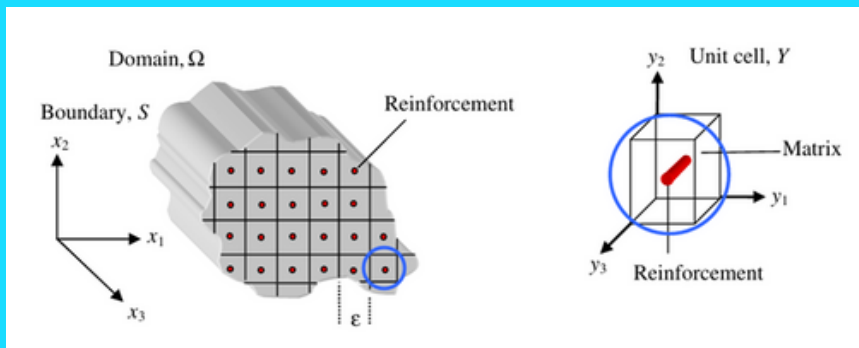
- Método dos Elementos Finitos

É um método numérico que realiza uma discretização de um meio contínuo em pequenos elementos, mantendo as mesmas propriedades do meio original [7].

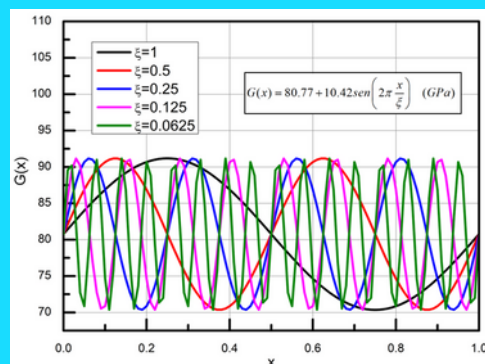
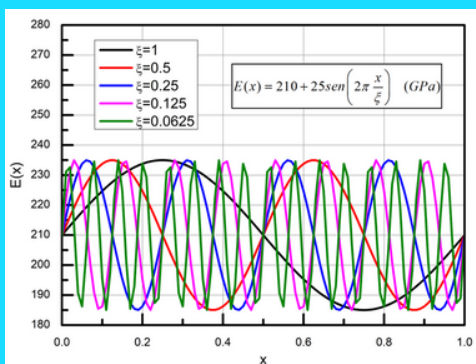


# HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA

O método de homogeneização assintótica consiste em transformar um problema sobre um meio micro-heterogêneo, periódico, caracterizado por coeficientes rapidamente oscilantes (problema original), em outro sobre um meio homogêneo assintoticamente equivalente ao heterogêneo inicial [8].

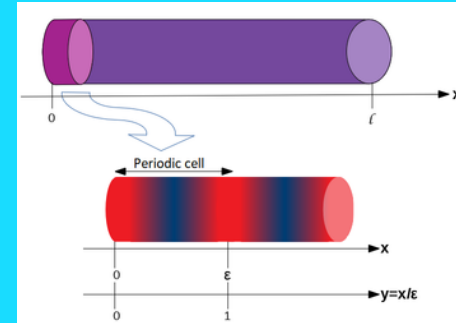


Materiais periódicos que possuem um célula periódica e o processo transforma coeficientes que oscilam em um coeficiente constante efetivo equivalente. No caso da mecânica dos materiais pode-se citar os módulos de elasticidades e coeficientes de Poisson.

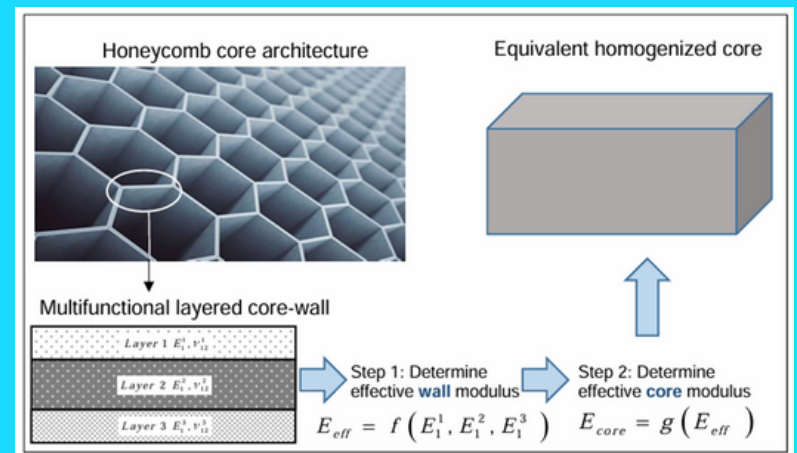


No processo de homogeneização, a ideia geral é procurar uma Solução Assintótica Formal (SAF) do problema original como uma expansão em séries de potências de um parâmetro pequeno em duas escalas, chamadas variáveis global/lenta e local/rápida.

Com isso as funções incógnitas originais são aproximadas por uma soma de funções periódicas e ao final do processo o parâmetro pequeno irá tender a zero [9].



Ao longo do processo são resolvidos os problemas relacionados à célula básica, no domínio da variável rápida, ou problemas locais. Durante esse processo é possível distinguir os coeficientes efetivos por analogia ao problema original.



A utilização da homogeneização no cálculo de ordem superior de teorias das multicamadas pode se tornar uma ferramenta poderosa em aplicações de engenharia.



# TÉCNICA DE HOMOGENEIZAÇÃO EM MULTICAMADAS

Definição do modelo estrutural de vigas laminadas e cálculo do seus campos de deslocamento, deformações e tensões.



Cálculo dos termos de energia interna e externa do problema e aplicação do primeiro teorema da energia utilizando cálculo variacional.



Resolução dos problemas locais através da minimização de todos os funcionais do somatório.



Proposta de solução fundamental assintótica para cada função incógnita do problema.



Explicitação das propriedades efetivas e do problema homogeneizado equivalente.



Análise do caso prático: características do material, tipo de heterogeneidade, condições de periodicidade, propriedades de cada fase.



Escolha do método analítico ou numérico para resolver o problema homogêneo.

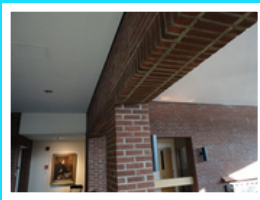
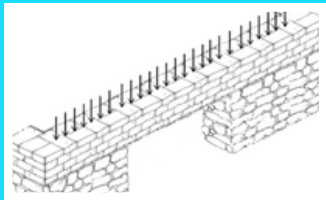


Estudo da célula unitária do problema real para aproximar a variação do material por quantas camadas forem necessárias.

# IMPACTOS E APLICAÇÕES

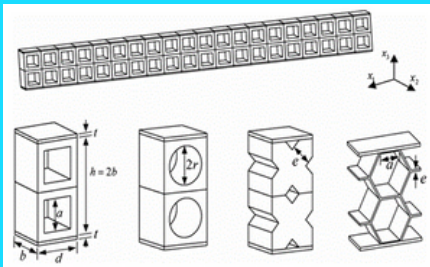
Ao combinar a homogeneização com a modelagem de multicamadas é possível prever o comportamento estrutural de várias classes de vigas heterogêneas:

- Vigas com material periódico



Vigas em alvenaria variam as características dos tijolos e da argamassa periodicamente.

- Vigas com furos periódicos



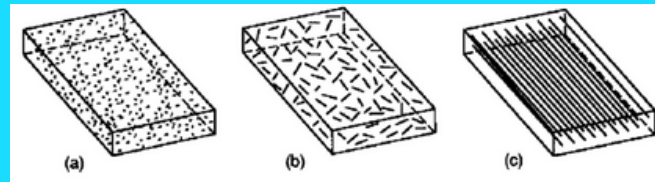
As estruturas esqueleto, muitas vezes variam em material e vazio de maneira periódica.

Então, no vazio a homogeneização é aplicada considerando características elásticas nulas ou quase nulas.

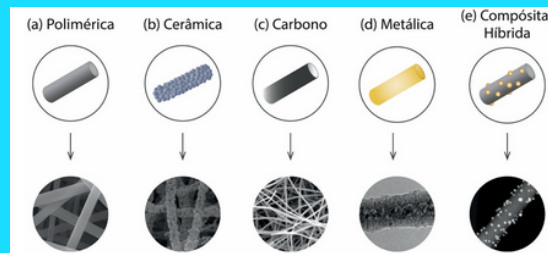
- Materiais de composições aleatórias



O concreto possui uma composição, em meso escala, formada por agregados graúdos, vazios e argamassa (agregado miúdo, água e cimento).



Em uma escala micro, pode-se considerar as variações de fibras, reforços, partículas como adições e aditivos. Não só para o concreto como para qualquer outra matriz reforçada por fibras.



Todas essas variações de materiais podem ser modeladas por uma aproximação periódica através de diversas camadas em uma célula unitária.

- Impactos ambientais, sociais e tecnológicos

Ter uma formulação que capture as diferenças de heterogeneidades sem precisar realizar novos experimentos gera grande economia e impacto.

A produção dos componentes do concreto representam grande parte da emissão do gás carbônico na atmosfera.



Isso demonstra a importância de modelar composições de concreto com agregados reciclados, tipos alternativos de cimento ou outros componentes da mistura, buscando uma composição sustentável e viável.



A utilização de compósitos piezoelétricos e nanofibras de carbono é essencial nas inovações tecnológicas e um exemplo é no aumento de eficiência de painéis solares. Materiais reforçados por essas fibras podem ter efeitos térmicos e elétricos inseridos nessa formulação.

Além desses impactos, de maneira geral, buscar a eficiência nas composições de materiais gera economia e projetos mais eficientes para a engenharia.



# REFERÊNCIAS

- [1] VINSON, J. R.; SIERAKOWSKI, R. L. The Behavior of Structures Composed of Composite Materials. Second Ed. Ontario, 2008.
- [2] Y. M. GHUGAL AND R. P. SHIMPI. A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams. Journal of REINFORCED PLASTICS AND COMPOSITES, Vol. 20, No. 03, 2001.
- [3] TIMOSHENKO, S. P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section, Philosophical Magazine, p. 744, 1921.
- [4] SAYYAD, A. S. Comparison of various refined beam theories for the bending and free vibration analysis of thick beams. Applied and Computational Mechanics, 2011.
- [5] SAYYAD, A. S.; GHUGAL, Y. M. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature. Composite Structures, v. 171, n. October, p. 486-504, 2017.
- [6] EVANS, L. C. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Ed. 2. 1993.
- [7] REDDY, J. N.; Energy principles and variational methods in applied mechanics". Wiley, 2nd Edition, 2002.
- [8] BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. Homogenization: averaging processes in-periodic, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [9] PRADO LEITE, L. F.; SANTANA, E. A.; GARCIA, L. P. S.; DA ROCHA, F. C.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J.; Homogeneização assintótica de um problema para uma equação elíptica com coeficiente continuamente diferenciável localmente periódico. Sigmae, 2024.

# AUTORES

- Prof. Dr. Fabio Carlos da Rocha  
(DEC/PROEC/Universidade Federal de Sergipe – BR)
- Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana  
(DMA/Universidade Federal de Sergipe – BR)
- Prof. Dr. Julián Bravo Castellero  
(IIAS/Universidad Nacional Autónoma del México – MX)
- Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fenández  
(DME/Universidade Federal de Pelotas – BR)
- Eng. Leonardo Fellipe Prado Leite  
(PROEC/Universidade Federal de Sergipe – BR)
- Isadora Caetano de Almeida  
(DFI/Universidade Federal de Sergipe – BR)
- Juan Carlos Avilés García  
(IIAS/Universidad Nacional Autónoma del México – MX)

# REALIZAÇÃO



UNAM



# FINANCIAMENTO

- Universidade Federal de Sergipe – Edital Nº13/2023/POSGRAP/CORI/AGITTE/COPES/COPGD para formação de equipes internacionais formuladoras de soluções locais para problemas globais (ODS);
- Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) – Projeto Universal Processo No 402857/2021-6;
- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – PDPG Emergencial de Consolidação Estratégica dos Programas de Pós-Graduação (PPGs) stricto sensu acadêmicos com notas 3 e 4, Processo No 88887.711070/2022-00.