Polinômios generalizados e uma estimativa do número de raízes

Alan Almeida Santos

Departamento de Matemática, DMAI,
Campus Prof. Alberto Carvalho, UFS,
49500-000, Itabaiana, SE
E-mail: alan@ufs.br

Resumo

Definiremos uma classe de funções que estende a noção de polinômios em uma variável e demonstraremos um resultado curioso sobre essas funções, a saber, que o número de raízes positivas é limitado pela quantidade de parcelas do polinômio generalizado.

Palavras-chave

Teoria de equações, polinômios generalizados.

Abstract

We will define a new class of functions which extend the notion of polynomial in one variable and we will prove a interesting result about this functions, en effect, that the number of positive roots of a such function is less than the quantity of monomials which appear in its expression.

Keywords

Theory of equations, generalized polynomials.

Introdução

A teoria de equações utiliza resultados de análise e álgebra com o objetivo de obter informações sobre as soluções de uma dada equação ou de um sistema de equações. Em geral, as equações estudadas são algébricas (polinomiais) e as principais questões versam sobre estimativa ou finitude da quantidade de raízes e a localização desses zeros em seu espaço ambiente. A Teoria de Galois que estabelece um critério para a solubilidade de polinômios por fórmulas envolvendo radicais e a teoria BKK ([1],[3]) (Bernstein/Kushnirenko/Khovanskii) sobre sistemas de polinômios em várias variáveis são capítulos notáveis da teoria de equações.

Essa teoria tem-se mostrado uma ferramenta útil na pesquisa de equilíbrios em sistemas dinâmicos (equações diferenciais ordinárias). Com efeito, em Mecânica Celeste, área da física que estuda o movimento de corpos sujeitos à interação gravitacional, a busca por *movimentos de equilíbrio relativo* nos conduzem a sistemas de equações que definem as chamadas *configurações centrais*. Tais equações têm um aspecto semelhante ao das equações algébricas (polinomiais) com a diferença de que os expoentes dos monômios são reais e não inteiros. Um im-

portante problema de pesquisa nessa área ([4]) diz respeito à finitude de configurações centrais e a obtenção de uma cota superior para o número de soluções das equações que definem essas configurações. No celebrado artigo ([3]), os autores fizeram uso da teoria BKK para demonstrar que o número de configurações centrais do problema de quatro corpos é finito.

Motivado pelos problemas que encontramos em nossas pesquisas sobre configurações centrais, resolvemos escrever esse breve artigo sobre uma nova classe de funções que abrange a classe de funções polinomiais, uma vez que os expoentes da variável independente são reais e não necessariamente inteiros não-negativos, e estabeleceremos um resultado interessante sobre a quantidade de zeros positivos dessas funções.

É bem sabido que o número de zeros de um polinômio é limitado pelo grau. Por exemplo, o polinômio de coeficiente reais $x^{100} - 2$ tem no máximo 100 raízes em $\mathbb{R}$. Quando de fato o mesmo possui apenas 2 raízes reais. Esse exemplo mostra que o grau não é uma cota apurada para a quantidade de zeros de uma função polinomial. Usando o clássico teorema de Rolle da análise real, vamos

demonstrar que o número de monômios que aparecem na expressão é um limitante mais eficaz para o número de raízes.

Polinômios algébricos

Em rigor, polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ são sequências de elementos em $\mathbb{K}$ nas quais a partir de um certo índice, todos os termos são-nulos. Daí vem a denominação secundária *sequência quase-nula*. Feitas algumas manipulações com essas sequências, percebe-se que todo polinômio pode ser escrito na forma

$$a_0 + a_1\mathbb{X} + a_2\mathbb{X}^2 + \dots + a_n\mathbb{X}^n$$

onde os coeficientes a_i pertencem ao corpo $\mathbb{K}$ e o símbolo $\mathbb{X}$ representa a sequência $(0, 1, 0, \dots)$. Dessa forma, os polinômios induzem funções algébricas do corpo no corpo que são representadas trocando-se a indeterminada $\mathbb{X}$ pela variável independente x :

$$f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Para o leitor leigo em álgebra, pode parecer precisismo distinguir esses dois objetos tão parecidos e, por isso, vale a pena informar que sobre corpos finitos um polinômio não nulo pode induzir a função nula. Sobre corpos infinitos, $\mathbb{R}$ por exemplo, essa anomalia não ocorre. Uma vez que investigaremos apenas aspectos analíticos dessas funções definidas sobre os reais, cometeremos um leve abuso de linguagem e chamaremos as funções polinomiais de polinômios.

Para polinômios algébricos temos o seguinte

Teorema 1 *Se $\mathbb{K}$ é um corpo e $f \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$ é um polinômio de grau n então existem no máximo n elementos $a \in \mathbb{K}$ tais que $f(a) = 0$.*

Ou seja, o número de raízes de um polinômio algébrico é limitado pelo grau.

Se o grau do polinômio é muito grande e seus coeficientes são reais, temos uma estimativa ainda mais fina para o número de zeros positivos da equação cuja demonstração pode ser encontrada em ([2]).

Teorema 2 (Regra dos sinais de Descartes) *Seja $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ um polinômio com coeficientes reais. Se V é o número de variações de sinais na lista*

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

então o número de zeros positivos de f é menor ou igual a V .

Por exemplo, o polinômio $f(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x^2 - x$ tem 3 variações de sinais em sua lista de coeficientes

$$1 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad 0$$

e portanto, tem no máximo 3 raízes positivas. De fato f tem 1 raiz negativa, 1 nula e 3 positivas.

Repare que o número V de variações de sinais é inferior ao número de parcelas não-nulas de modo que a regra de Descartes torna-se bastante útil quando o grau do polinômio é elevado.

Exemplo 3 O polinômio $x^{100} - 2x^5 - 3x^2 + x + 1$ tem no máximo duas raízes reais positivas. De fato o polinômio apresenta 2 zeros positivos.

Antes de seguirmos com o resultado principal, mencionaremos uma propriedade importante das funções deriváveis sobre a reta real.

Teorema 4 (Rolle) *Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ um função derivável sobre o intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Se $a, b \in I$ com $a < b$ e $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

O Teorema (4) é encontrado em qualquer livro de cálculo e tem como consequência uma relação interessante entre os zeros de f e as raízes da derivada f' (pontos críticos de f).

Corolário 5 *Seja $\mathcal{Z}(f)$ o número de zeros de f no intervalo I . Se $\mathcal{Z}(f) \geq n$ então $\mathcal{Z}(f') \geq n - 1$.*

Prova: Por indução sobre n . Para $n = 1$, o resultado é trivialmente verdadeiro. Supondo que a implicação é válida para um certo n , considere que f tenha $n + 1$ zeros denotados por $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$. No intervalo $[a_1, a_n]$, f tem n zeros e por hipótese de indução f' tem $n - 1$ zeros nesse subintervalo. Por outro lado, sendo $f(a_n) = f(a_{n+1}) = 0$, o teorema Rolle garante que existe $x \in (a_n, a_{n+1})$ tal que $f'(x) = 0$. E uma vez que $x > a_n$, ele é distinto dos demais zeros de f' localizados no intervalo $[a_1, a_n]$. Assim, $\mathcal{Z}(f') \geq n$. $\square$

Polinômios generalizados

Polinômios algébricos são combinações lineares de potências inteiras positivas da variável x . Nessas funções, a potência x^n indica o produto de n fatores iguais $x \cdots x$. Mas o que significaria potências do tipo

$$x^\pi, \quad x^{\sqrt{2}}, \quad x^{-e}.$$

Tais potências com expoente real são definidas através da função logaritmo natural pela regra

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

sendo que $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, o número 3^π é calculado pela fórmula $\exp(\pi \ln(3))$. É imediato verificar que as potências com expoente real têm as mesmas propriedades algébricas que as potências de expoente racional.

Uma vez definidas as potências de base positiva e expoente reais, podemos construir funções que generalizam, num certo sentido, o conceito de funções algébricas.

Definição 6. *um polinômio generalizado é uma função $P: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre os reais positivos*

pela regra

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{\alpha_i}$$

onde $a_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 7 $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x\sqrt{2} - x^{-1/2} + 1$.

Figure 1: Gráfico de $P(x)$

Observe que um resultado análogo ao Teorema (1) para polinômios generalizados não faria sentido tendo em vista a ausência do conceito de grau no mesmo contexto da teoria de polinômios algébricos.

Em verdade temos o seguinte

Teorema 8 Seja $P: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio generalizado definido pela regra

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{\alpha_i}$$

onde $a_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$ com $a_i \neq 0$ para todo i . Então o número de zeros positivos de P é menor que o número n de parcelas da expressão.

Prova: A demonstração será por indução sobre o número n de parcelas. Com efeito, para $n = 1$ o polinômio $P(x) = ax^\alpha$ não tem raiz alguma em $\mathbb{R}_+$ e portanto, o teorema é trivialmente verdadeiro para $n = 1$.

Supondo então que o teorema é válido para todo inteiro positivo menor ou igual a um certo n , consideremos o polinômio

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{\alpha_i}$$

onde todos os coeficientes $a_i \neq 0$. Definindo o polinômio $f(x) = x^{-\alpha_{n+1}} \cdot P(x)$ vemos claramente que f tem $n+1$ parcelas e que a última delas é constante. A derivada de f é novamente um polinômio generalizado com n parcelas e, por hipótese de indução, f' tem no máximo $n-1$ zeros no domínio $\mathbb{R}_+$. Pelo corolário (5), f e, conseqüentemente P , têm no máximo n zeros positivos. $\square$

Corolário 9 Se $f \in \mathbb{R}[X]$ é um polinômio com m monômios distintos ($m \geq 1$) então o número de zeros reais é no máximo $2m-1$.

Prova: Com efeito, os polinômios $f(x)$ e $f(-x)$ têm m parcelas distintas e pelo Teorema (8), ambos têm no máximo $m-1$ zero positivos. Considerando que os zeros positivos de $f(-x)$ são os zeros negativos de f e que $x = 0$ pode eventualmente ser uma raiz de f , estimamos que o número máximo de zeros reais do polinômio f é $2 \cdot (m-1) + 1 = 2m-1$. $\square$

O Teorema (8) mostra que a conjectura abaixo é verdadeira para $n = 1$ (ver [5]).

Conjectura de Kouchnirenko *Considere um sistema de n equações polinomiais em n variáveis, onde a i -ésima equação tem m_i termos. Então o número de zeros isolados em $(\mathbb{R}_+)^n$ é no máximo $(m_1 - 1) \cdot (m_2 - 1) \cdots (m_n - 1)$.*

Na mesma referência tem-se um contra-exemplo para o qual a conjectura é falsa com $n = 2$ e $m_1 = m_2 = 3$.

Considerações finais

O Teorema (8) apresenta uma desvantagem quando comparado à regra de Descartes. Com efeito, o número de parcelas, que limita a quantidade de raízes positivas de um polinômio, é maior que o número de variações de sinais na lista de coeficientes e, portanto, o teorema (8) produz uma cota menos fina para o número de raízes. Por outro lado, a aplicação da regra de Descartes limita-se tão somente aos polinômios algébricos e não abrange a classe dos polinômios generalizados.

O resultado em tela foi demonstrado lateralmente em nossa tese de doutorado mas não foi publicado e o mesmo é decorrente de uma interessante conversa com nosso ex-orientador Prof. Alain Albouy do IMCCE - Paris.

References

- [1] D. N. Bernstein, "The number of roots of a system of equations", *Functional Analysis and its Applications*, 9, 183-185, (1975).
- [2] J. V. Uspensky, "Theory of Equations", McGraw-Hill Book Company Inc., New York, (1948).
- [3] M. Hampton & R. Moeckel, "Finiteness of relative equilibria of the four body problem", *Inventiones Mathematicae*, 163, 289-312, (2006).
- [4] S. Smale, "Mathematical problems for the next century". *Math. Intell.* 20, 715, (1998).
- [5] B. Sturmfels, "Solving systems of polynomial equations". *CBMS*, 97, (2002).
- [6] W. Rudin, "Principles of mathematical analysis". McGraw-Hill, Third Edition, New York, (1976).